18th Benelux Mathematical Olympiad

Valkenswaard, 24–26 April 2026

Les problèmes ne sont pas classés par ordre de difficulté estimée.

Problème 1. Soit n un entier strictement positif et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres réels strictement positifs tels que

$$a_k(b_1 + \cdots + b_k) \leqslant k \qquad \text{et} \qquad b_k(a_1 + \cdots + a_k) \leqslant k$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Démontrer que $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leqslant n^2$.

Problème 2. Soient a_0 et N deux entiers strictement positifs. Ben et Lux s'affrontent au jeu suivant à tour de rôle. Avant de commencer, le nombre N est écrit au tableau. Au $i^{\text{ème}}$ coup du jeu ($i \geqslant 1$), le joueur dont c'est le tour choisit un entier strictement positif $a_i \leqslant a_{i-1}$, et remplace le nombre n au tableau à ce moment par le nombre $n - a_i$. Le premier joueur à écrire un nombre $n \leqslant 0$ perd la partie. Ben joue le premier coup. Déterminer, pour chaque $N \geqslant 2$, la plus petite valeur de a_0 pour laquelle Ben peut gagner la partie, peu importe comment joue Lux.

Problème 3. Soit $ABCD$ un parallélogramme pour lequel $|AC| = |BC|$, et soit A' l'image de A par la symétrie centrale de centre B. Les droites BD et $A'D$ coupent le cercle circonscrit au triangle ACD en deux autres points E et F, respectivement. Soit G le point d'intersection des droites AE et $A'C$. Démontrer que les droites AC, EF en BG sont concourantes ou parallèles.

Problème 4. Déterminer toutes les paires (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquelles il existe un entier strictement positif c tel que $a^2 + b^2 + c^2$ divise $(a + b + c)^2$.

Language: French

Temps accordé : 4 heures 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points