16th Benelux Mathematical Olympiad

Valkenswaard, 26th – 28th April 2024

Language: **Dutch**

De opgaven staan niet op volgorde van ingeschatte moeilijkheidsgraad.

Opgave 1. (a) Laat $a_0, a_1, \dots, a_{2024}$ reële getallen zijn die voldoen aan $|a_{i+1} - a_i| \leqslant 1$ voor $i = 0, 1, \dots, 2023$. Vind de minimale waarde van

$$a_0a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_{2023}a_{2024}.$$

(b) Bestaat er een reëel getal C zodat

$$a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - a_3a_4 + \cdots + a_{2022}a_{2023} - a_{2023}a_{2024} \geqslant C$$

voor alle reële getallen $a_0, a_1, \dots, a_{2024}$ die voldoen aan $|a_{i+1} - a_i| \leqslant 1$ voor $i = 0, 1, \dots, 2023$?

Opgave 2. Zij n een (strikt) positief geheel getal. In een rooster bestaat een *pad* van $(0,0)$ naar $(2n, 2n)$ uit $4n$ opeenvolgende eenheidsstappen $(1,0)$ of $(0,1)$. Bewijs dat het aantal paden dat het vierkant met hoekpunten $(0,0)$, $(2n,0)$, $(2n,2n)$, $(0,2n)$ opdeelt in twee gebieden met even oppervlakte, gelijk is aan

$$\frac{\binom{4n}{2n} + \binom{2n}{n}}{2}.$$

Opgave 3. Zij ABC een driehoek met omgeschreven cirkel Ω zodat $|AC| \neq |BC|$. Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van ABC. De binnenbissectrice van $\angle CAB$ snijdt zijde BC in D, en de buitenbissectrices van $\angle ABC$ en $\angle BCA$ snijden Ω nogmaals in E en F, respectievelijk. Zij G het snijpunt van de lijnen (rechtes) AE en FI en zij Γ de omgeschreven cirkel van driehoek BDI. Bewijs dat E op Γ ligt dan en slechts dan als G op Γ ligt.

Opgave 4. Voor een (strikt) positief geheel getal n, zij $\operatorname{rad}(n)$ het product van de verschillende priemfactoren van n. Bewijs dat er gehele getallen $a, b > 1$ bestaan die voldoen aan $\operatorname{ggd}(a,b) = 1$ en

$$\operatorname{rad}(ab(a+b)) < \frac{a+b}{2024^{2024}}.$$

Er geldt bijvoorbeeld $\operatorname{rad}(20) = \operatorname{rad}(2^2 \cdot 5) = 2 \cdot 5 = 10$ en $\operatorname{rad}(18) = \operatorname{rad}(2 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3 = 6$.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.