# 16th Benelux Mathematical Olympiad

## Valkenswaard, 26th – 28th April 2024

Language: **French**

*Les problèmes ne sont pas ordonnés par difficulté estimée.*

**Problème 1.** (a) Soient $a_0$, $a_1$, ..., $a_{2024}$ des nombres réels tels que $|a_{i+1} - a_i| \leqslant 1$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, 2023$. Déterminer la plus petite valeur possible de

$$a_0a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_{2023}a_{2024}.$$

(b) Existe-t-il un nombre réel $C$ tel que

$$a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - a_3a_4 + \cdots + a_{2022}a_{2023} - a_{2023}a_{2024} \geqslant C$$

pour tous nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_{2024}$ satisfaisant $|a_{i+1} - a_i| \leqslant 1$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, 2023$ ?

**Problème 2.** Soit $n$ un entier strictement positif. Dans une grille de coordonnées, un *chemin* de $(0, 0)$ vers $(2n, 2n)$ se compose de $4n$ pas unitaires $(0, 1)$ ou $(1, 0)$ consécutifs. Prouver que le nombre de tels chemins divisant le carré de sommets $(0, 0)$, $(2n, 0)$, $(2n, 2n)$, $(0, 2n)$ en deux régions d'aires paires vaut

$$\frac{\binom{4n}{2n} + \binom{2n}{n}}{2}.$$

**Problème 3.** Soit $ABC$ un triangle avec $|AC| \neq |BC|$ dont le centre du cercle inscrit est $I$ et dont le cercle circonscrit est $\Omega$. La bissectrice intérieure de l'angle $\angle CAB$ coupe le côté $[BC]$ en $D$, tandis que les bissectrices extérieures des angles $\angle ABC$ et $\angle BCA$ coupent de nouveau $\Omega$ en $E$ et $F$, respectivement. Soit $G$ l'intersection des droites $AE$ et $FI$ et soit $\Gamma$ le cercle circonscrit du triangle $BDI$. Montrer que $E$ se situe sur $\Gamma$ si et seulement si $G$ se situe sur $\Gamma$.

**Problème 4.** Pour chaque entier strictement positif $n$, soit $\operatorname{rad}(n)$ le produit des différents facteurs premiers de $n$. Prouver qu'il existe des entiers $a, b > 1$ tels que $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ et

$$\operatorname{rad}(ab(a+b)) < \frac{a+b}{2024^{2024}}.$$

*Par exemple,* $\operatorname{rad}(20) = \operatorname{rad}(2^2 \cdot 5) = 2 \cdot 5 = 10$ *et* $\operatorname{rad}(18) = \operatorname{rad}(2 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3 = 6$.

*Language: French*

*Temps: 4 heures et 30 minutes.*
*Chaque problème vaut 7 points.*