



15th Benelux Mathematical Olympiad

Luxembourg, 5th – 7th May 2023

Language: **Dutch**

De opgaven staan niet op volgorde van ingeschatte moeilijkheidsgraad.

Opgave 1. Vind alle functies $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zodat

$$(x - y)(f(x) + f(y)) \leq f(x^2 - y^2) \quad \text{voor alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Opgave 2. Vind alle gehele getallen $k \geq 1$ die aan volgende eigenschap voldoen: gegeven k verschillende kleuren, indien elk geheel getal gekleurd wordt in één van deze k kleuren, moeten er gehele getallen $a_1 < a_2 < \dots < a_{2023}$ van dezelfde kleur bestaan zodanig dat de verschillen $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{2023} - a_{2022}$ allen machten van 2 zijn.

Opgave 3. Zij ABC een driehoek met I het middelpunt van de ingeschreven cirkel en ω de omgeschreven cirkel. Zij N het tweede snijpunt van de lijn (rechte) AI met ω . De lijn (rechte) door I loodrecht op lijn (rechte) AI snijdt lijn (rechte) BC , lijnstuk $[AB]$, en lijnstuk $[AC]$ in de punten D , E , en F , respectievelijk. De omgeschreven cirkel van driehoek AEF snijdt ω opnieuw in P , en lijnen (rechtes) PN en BC snijden in Q . Bewijs dat lijnen (rechtes) IQ en DN snijden op ω .

Opgave 4. Een natuurlijk getal $n > 0$ wordt *vriendelijk* genoemd indien elke twee aan elkaar grenzende cijfers van n , bekeken in basis 10, exact 1 verschillen. *Bijvoorbeeld, 6787 is vriendelijk, maar 211 en 901 niet.*

Vind alle oneven natuurlijke getallen m waarvoor er een vriendelijk getal bestaat dat deelbaar is door $64m$.

Language: *Dutch*

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten.

Elke opgave is 7 punten waard.