15th Benelux Mathematical Olympiad

Luxembourg, 5th – 7th May 2023

Language: **French**

Les problèmes ne sont pas ordonnés par difficulté estimée.

Problème 1. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(x-y)\big(f(x)+f(y)\big) \leqslant f\big(x^2-y^2\big) \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problème 2. Déterminer tous les entiers $k \geqslant 1$ vérifiant la propriété suivante : étant données k couleurs différentes, si chaque entier est colorié dans l'une de ces k couleurs, alors il existe nécessairement des entiers $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2023}$ de la même couleur tels que les différences $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots,$ $a_{2023} - a_{2022}$ sont toutes des puissances de 2.

Problème 3. Soient ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et ω son cercle circonscrit. Soit N le deuxième point d'intersection de la droite AI avec ω. La droite perpendiculaire à AI passant par I coupe la droite BC, le segment $[AB]$, et le segment $[AC]$ en les points D, E, et F, respectivement. Le cercle circonscrit au triangle AEF rencontre ω à nouveau en P, et les droites PN et BC se coupent en Q. Prouver que les droites IQ et DN se coupent en un point de ω.

Problème 4. Un entier strictement positif n est *amical* si la différence de chaque paire de chiffres voisins dans n écrit en base 10 vaut exactement 1. *Par exemple, 6787 est amical, mais 211 et 901 ne le sont pas.*

Trouver tous les nombres naturels impairs m pour lesquels il existe un entier amical divisible par $64m$.

Language: French

Temps : 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème vaut 7 points.