14th Benelux Mathematical Olympiad

Leuven, April 29–May 1

Problemen är inte ordnade efter uppskattad svårighetsgrad

Problem 1. Låt $n \geqslant 0$ vara ett heltal och låt $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vara reella tal. Visa att det finns $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ sådant att

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \leqslant a_0 + a_1 + \cdots + a_k$$

för alla reella tal $x \in [0, 1]$.

Problem 2. Låt n vara ett positivt heltal. Längs en linje går n myror med konstanta nollskilda hastigheter. Olika myror behöver varken gå med samma hastighet eller i samma riktning. När två eller fler myror möts så byter alla myror i mötet omedelbart riktning. (Olika myror behöver inte gå i motsatt riktning när de möts, då en snabbare myra kan gå ikapp en långsammare myra som går i samma riktning.) Myrorna fortsätter gå för evigt. Givet att det totala antalet möten är ändligt, bestäm det största möjliga antalet möten som funktion av n.

Problem 3. Låt ABC vara en oliksidig spetsvinklig triangel. Låt B_1 vara punkten på strålen $[AC$ sådan att $|AB_1| = |BB_1|$. Låt C_1 vara punkten på strålen $[AB$ sådan att $|AC_1| = |CC_1|$. Låt B_2 och C_2 vara punkterna på linjen BC sådana att $|AB_2| = |CB_2|$ och $|BC_2| = |AC_2|$. Visa att punkterna B_1, C_1, B_2, C_2 ligger på en cirkel.

Problem 4. En delmängd A av de naturliga talen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ sägs vara *bra* om varje heltal $n > 0$ har högst en primtalsfaktor p sådan att $n - p \in A$.

(a) Visa att mängden $S = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$ av kvadrattal är bra.

(b) Hitta en oändlig bra mängd disjunkt från S.

(Två mängder är *disjunkta* om de inte har något gemensamt element.)

Language: Swedish

Tid: 4 timmar och 30 minuter

För varje problem kan man få upp till 7 poäng