# 14th Benelux Mathematical Olympiad

Leuven, April 29–May 1

*De opgaven staan niet op volgorde van ingeschatte moeilijkheidsgraad.*

**Opgave 1.** Zij $n \geqslant 0$ een geheel getal en zij $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reële getallen. Bewijs dat er een $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ bestaat zodanig dat

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \leqslant a_0 + a_1 + \cdots + a_k$$

geldt voor alle reële getallen $x \in [0, 1]$.

**Opgave 2.** Zij $n$ een positief geheel getal. $n$ mieren lopen op een (rechte) lijn met een constante snelheid verschillend van nul. Verschillende mieren lopen niet noodzakelijk in dezelfde richting of met dezelfde snelheid. Wanneer twee of meer mieren botsen, veranderen alle mieren betrokken bij de botsing van richting. (Verschillende mieren hoeven niet per se in tegengestelde richting te lopen wanneer ze botsen; het is mogelijk dat een snellere mier een langzamere inhaalt.) De mieren stoppen nooit met lopen.
Stel dat het totale aantal botsingen eindig is, bepaal dan het maximale aantal botsingen als functie van $n$.

**Opgave 3.** Zij $ABC$ een niet-gelijkbenige, scherphoekige driehoek. Zij $B_1$ het punt op halfrechte $[AC$ zodanig dat $|AB_1| = |BB_1|$. Zij $C_1$ het punt op halfrechte $[AB$ zodanig dat $|AC_1| = |CC_1|$. Zij $B_2$ en $C_2$ de punten op (rechte) lijn $BC$ zodanig dat $|AB_2| = |CB_2|$ en $|BC_2| = |AC_2|$. Bewijs dat $B_1, C_1, B_2, C_2$ op een cirkel liggen.

**Opgave 4.** Een deelverzameling $A$ van de natuurlijke getallen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ is *mooi* als elk geheel getal $n > 0$ hoogstens één priemfactor $p$ heeft zodat $n - p \in A$.

(a) Bewijs dat de verzameling $S = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$ van kwadraten mooi is.

(b) Vind een oneindige mooie verzameling disjunct van $S$.
(Twee verzamelingen zijn disjunct indien ze geen gemeenschappelijke elementen hebben.)

*Language: Dutch*

*Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten*
*Elke opgave is 7 punten waard*