14th Benelux Mathematical Olympiad

Leuven, April 29–May 1

Les problèmes ne sont pas ordonnés par difficulté estimée.

Problème 1. Soit n un nombre naturel, et soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. Montrer qu'il existe $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ tel que

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \leqslant a_0 + a_1 + \cdots + a_k$$

pour tout nombre réel $x \in [0, 1]$.

Problème 2. Soit n un nombre naturel non nul. Le long d'une droite, n fourmis marchent à vitesses constantes et non nulles. Deux fourmis différentes ne marchent pas forcément à la même vitesse ni dans le même sens. Lorsque plusieurs fourmis entrent en collision, toutes les fourmis impliquées dans cette collision changent immédiatement de sens. (Plusieurs fourmis se déplaçant dans le même sens peuvent entrer en collision, puisqu'une fourmi plus rapide peut en rattraper une plus lente.) Les fourmis continuent indéfiniment de marcher. Supposant que le nombre total de collisions est fini, déterminer le nombre maximum de collisions en fonction de n.

Problème 3. Soit ABC un triangle scalène aigu. Soit B_1 le point de la demi-droite $[AC$ tel que $|AB_1| = |BB_1|$. Soit C_1 le point de la demi-droite $[AB$ tel que $|AC_1| = |CC_1|$. Soient B_2 et C_2 les points de la droite BC tels que $|AB_2| = |CB_2|$ et $|BC_2| = |AC_2|$. Montrer que B_1, C_1, B_2, C_2 sont cocycliques.

Problème 4. Un sous-ensemble A de l'ensemble des naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est dit *convenable* si chaque entier $n > 0$ admet au plus un facteur premier p tel que $n - p \in A$.

(a) Montrer que l'ensemble $S = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$ des carrés parfaits est convenable.

(b) Trouver un ensemble convenable qui est infini et disjoint de S.
(Deux ensembles sont *disjoints* s'ils n'ont pas d'élément en commun.)

Language: French

Temps accordé: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points