13th Benelux Mathematical Olympiad

Virtual, 1–2 May 2021

De opgaven staan niet op volgorde van ingeschatte moeilijkheidsgraad.

Opgave 1. (a) Bewijs dat voor alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a + b + c + d = 0$ geldt dat:

$$\max(a, b) + \max(a, c) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) + \max(c, d) \geqslant 0.$$

(b) Vind het grootste gehele getal $k \geq 0$ zodat het mogelijk is om k van de zes maxima in deze ongelijkheid door minima te vervangen zodat de ongelijkheid nog steeds geldt voor alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a + b + c + d = 0$.

Opgave 2. Er worden kiezels geplaatst op de vakjes van een 2021×2021 bord zodat elk vakje maximaal één steen bevat. De *kiezelverzameling* van een vakje op het bord is de verzameling van alle kiezels die in dezelfde rij of kolom als dit vakje liggen. Wat is het kleinst mogelijke aantal kiezels op het bord als er geen twee vakjes zijn met dezelfde kiezelverzameling?

Opgave 3. Laat $ABXC$ een koordenvierhoek zijn met O het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Zij D een punt op de lijn (rechte) BX zodat $|AD| = |BD|$. Zij E een punt op de lijn (rechte) CX zodat $|AE| = |CE|$. Bewijs dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek $\triangle DEX$ op de middelloodlijn van OA ligt.

Opgave 4. Een rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ van (strikt) positieve gehele getallen voldoet aan $a_1 > 5$ en $a_{n+1} = 5 + 6 + \ldots + a_n$ voor alle (strikt) positieve gehele n. Bepaal alle priemgetallen p zodat, onafhankelijk van de waarde van a_1, de rij een veelvoud van p moet bevatten.

Language: Dutch

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.