13th Benelux Mathematical Olympiad

Virtual, 1–2 May 2021

BxMO 2021

Les problèmes ne sont pas ordonnés par difficulté estimée.

Problème 1. (a) Prouver que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a + b + c + d = 0$,

$$\max(a, b) + \max(a, c) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) + \max(c, d) \geqslant 0.$$

(b) Trouver le plus grand entier positif k tel qu'il est possible de remplacer k des six maxima de cette inégalité par des minima de telle façon que l'inégalité reste vraie pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a + b + c + d = 0$.

Problème 2. Des cailloux sont placés sur les cases d'un échiquier de dimensions 2021×2021 de façon à ce que chaque case contienne au plus un caillou. La *collection de cailloux* d'une case est l'ensemble de tous les cailloux qui se trouvent dans la même ligne ou la même colonne que cette case. (Un caillou appartient à la collection de cailloux de la case sur laquelle il se trouve.) Quel est le nombre minimal de cailloux sur l'échiquier si deux cases différentes n'ont jamais la même collection de cailloux ?

Problème 3. Un quadrilatère cyclique $ABXC$ a pour centre de son cercle circonscrit le point O. Soit D un point sur la droite BX tel que $|AD| = |BD|$. Soit E un point sur la droite CX tel que $|AE| = |CE|$. Prouver que le centre du cercle circonscrit au triangle DEX se situe sur la médiatrice du segment $[OA]$.

Problème 4. Une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ d'entiers strictement positifs vérifie $a_1 > 5$ et $a_{n+1} = 5 + 6 + \cdots + a_n$ pour tout entier strictement positif n. Trouver tous les nombres premiers p tels que, quelle que soit la valeur de a_1, cette suite contient toujours un multiple de p.

Language: French

Temps accordé: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points