11th Benelux Mathematical Olympiad

Valkenswaard, 26–28 April 2019

Les problèmes ne sont pas ordonnés par difficulté estimée.

Problème 1.

a) Soient a, b, c, d des nombres réels tels que $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$. Prouver que

$$ab(a-b) + bc(b-c) + cd(c-d) + da(d-a) \leqslant \frac{8}{27}.$$

b) Trouver tous les quadruplets (a, b, c, d) de nombres réels tels que $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$ et pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Problème 2. Des pions et des tours sont placés sur un échiquier 2019×2019, avec au plus une pièce sur chacune des 2019^2 cases. Une tour *peut voir* une autre tour si elles sont dans la même rangée ou colonne et si toutes les cases entre elles sont vides. Quel est le plus grand nombre p pour lequel p pions et $p + 2019$ tours peuvent être placés sur l'échiquier de sorte qu'aucune tour ne puisse voir une autre tour ?

Problème 3. Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points A et Z (avec $A \neq Z$). Soit B le centre de Γ_1 et C le centre de Γ_2. La bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$ coupe Γ_1 à nouveau en X et Γ_2 à nouveau en Y. Prouver que la bissectrice intérieure de $\widehat{BZC}$ passe par le centre du cercle circonscrit au triangle XYZ.

Étant donnés des points P, Q, R sur une droite ℓ dans cet ordre, et un point S en dehors de ℓ, la bissectrice intérieure *de $\widehat{PQS}$ est la droite qui divise $\widehat{PQS}$ en deux angles égaux, tandis que la* bissectrice extérieure *de $\widehat{PQS}$ est la droite qui divise $\widehat{RQS}$ en deux angles égaux.*

Problème 4. Un entier $m > 1$ est *riche* si pour tout entier strictement positif n, il existe des entiers strictement positifs x, y, z tels que $n = mx^2 - y^2 - z^2$. Un entier $m > 1$ est *pauvre* s'il n'est pas riche.

a) Trouver un entier pauvre.

b) Trouver un entier riche.

Language: French

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points