10th Benelux Mathematical Olympiad

Luxembourg, 27th–29th April 2018

Language: **Dutch**

De opgaven staan niet op volgorde van ingeschatte moeilijkheidsgraad.

Opgave 1. (a) Bepaal de kleinste waarde van

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}-2018\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x}-2018\right),$$

waarbij x en y variëren over de (strikt) positieve reële getallen.

(b) Bepaal de kleinste waarde van

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}+2018\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x}+2018\right),$$

waarbij x en y variëren over de (strikt) positieve reële getallen.

Opgave 2. In het land Heptanomisma worden vier verschillende munten en drie verschillende bankbiljetten gebruikt; hun waardes zijn zeven verschillende (strikt) positieve gehele getallen. De waarde van het kleinste bankbiljet is (strikt) groter dan de som van de waardes van de vier verschillende munten. Een toerist in het bezit van precies één munt van elke waarde en precies één bankbiljet van elke waarde kan het boek over numismatologie dat hij wil kopen, niet betalen. De wiskundig georiënteerde boekhandelaar vertelt de toerist echter dat hij het boek mag kopen voor een prijs naar keuze, mits hij deze prijs op meerdere manieren kan betalen.
(*De toerist kan een prijs op meerdere manieren betalen als er twee verschillende deelverzamelingen van zijn munten en bankbiljetten zijn die elk evenveel waard zijn als deze prijs.*)

(a) Bewijs dat de toerist het boek kan kopen als de waarde van elk bankbiljet (strikt) kleiner dan 49 is.

(b) Bewijs dat het zou kunnen dat de toerist met lege handen de boekwinkel moet verlaten als de waarde van het grootste bankbiljet 49 is.

Opgave 3. Zij ABC een driehoek met hoogtepunt H. Laat D, E en F de middens van respectievelijk lijnstukken AB, AC en AH zijn. De beelden van B en C onder puntspiegeling in F zijn respectievelijk P en Q.

(a) Bewijs dat de lijnen (rechten) PE en QD elkaar snijden op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

(b) Bewijs dat de lijnen (rechten) PD en QE elkaar snijden op lijnstuk AH.

Opgave 4. Een geheel getal $n \geqslant 2$ met precies s positieve delers $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_s = n$ noemen we *goed* als er een geheel getal k met $2 \leqslant k \leqslant s$ bestaat zodanig dat $d_k > 1 + d_1 + \cdots + d_{k-1}$. Een geheel getal $n \geqslant 2$ dat niet goed is, noemen we *slecht*.

(a) Bewijs dat er oneindig veel slechte gehele getallen zijn.

(b) Bewijs dat van elk zevental opeenvolgende gehele getallen die elk (strikt) groter zijn dan 2, er ten minste vier getallen goed zijn.

(c) Bewijs dat er oneindig veel rijtjes van zeven opeenvolgende goede gehele getallen zijn.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.