9th Benelux Mathematical Olympiad

5–7 May 2017 — Namur, Belgium

Problems

Language: ***Dutch***

De opgaven staan ***niet*** *op volgorde van ingeschatte moeilijkheidsgraad.*

Opgave 1. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ waarvoor geldt dat

$$f(xy) \cdot \operatorname{ggd}\Big(f(x)f(y), f(\tfrac{1}{x})f(\tfrac{1}{y})\Big) = xyf(\tfrac{1}{x})f(\tfrac{1}{y})$$

voor alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, waarbij $\operatorname{ggd}(a, b)$ staat voor de grootste gemene deler van a en b.

Opgave 2. Zij $n \geqslant 2$ een geheel getal. Alice en Bob spelen een spel dat gaat over een land bestaande uit n eilanden. Precies twee van deze n eilanden hebben een fabriek. In het begin is er nog geen enkele brug in het land. Alice en Bob moeten om beurten een brug bouwen tussen twee verschillende eilanden, en wel zodanig dat als de speler een brug bouwt tussen de eilanden I_1 en I_2, er geldt dat:

- I_1 en I_2 nog niet zijn verbonden door middel van een brug;
- minstens één van de twee eilanden I_1 en I_2 middels een aantal bruggen verbonden is met een eiland met een fabriek (of zelf een fabriek heeft). (Immers, je moet een fabriek kunnen bereiken om een brug te kunnen bouwen.)

Zodra een speler een brug bouwt die het mogelijk maakt om van de ene naar de andere fabriek te gaan, verliest deze speler het spel. (Dat leidt namelijk tot een industrieel gevecht tussen beide fabrieken.) Als Alice begint, bepaal dan (voor elke $n \geqslant 2$) wie een winnnende strategie heeft.

(*Opmerking*: Het is toegestaan om een brug te bouwen die over een andere brug heen gaat.)

Opgave 3. Zij gegeven een convexe vierhoek $ABCD$ met $\angle B = \angle C$ en $\angle D = 90°$. Veronderstel dat $|AB| = 2|CD|$. Bewijs dat de bissectrice van $\angle ACB$ loodrecht op CD staat.

Opgave 4. Een n-*Beneluxvierkant* (met $n \geqslant 2$) is een $n \times n$-rooster bestaande uit n^2 hokjes die elk een (strikt) positief geheel getal bevatten, zodanig dat aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

- de n^2 (strikt) positieve gehele getallen zijn allemaal verschillend;
- als we voor elke rij en elke kolom de grootste gemene deler berekenen van de n getallen in die rij/kolom, dan krijgen we $2n$ verschillende uitkomsten.

(a) Bewijs dat er in elk n-Beneluxvierkant (met $n \geqslant 2$) een hokje bestaat met een getal dat minstens $2n^2$ is.

(b) Noem een n-Beneluxvierkant *minimaal* als alle n^2 getallen in de hokjes hoogstens $2n^2$ zijn. Bepaal alle $n \geqslant 2$ waarvoor er een minimaal n-Beneluxvierkant bestaat.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard