8th Benelux Mathematical Olympiad

Soest, 29 April – 1 May 2016

Problème 1. Trouver le plus grand entier strictement positif N avec la propriété suivante : il existe des entiers $x_1, \ldots, x_N$ tels que pour tous $i \neq j$ le nombre $x_i^2 - x_i x_j$ n'est pas divisible par 1111.

Problème 2. Soit n un entier strictement positif. Supposons que ses diviseurs positifs peuvent être répartis en paires (c'est-à-dire groupés deux par deux) de telle sorte que la somme de chaque paire est un nombre premier. Prouver que ces nombres premiers sont tous différents et qu'aucun d'eux n'est un diviseur de n.

Problème 3. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ telles que

$$\Big(f\big(f(y) - x\big)\Big)^2 + f(x)^2 + f(y)^2 \;=\; f(y) \cdot \Big(1 + 2f\big(f(y)\big)\Big)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Problème 4. Un cercle ω passe par les deux sommets B et C d'un triangle ABC. De plus, ω coupe le segment $[AC]$ en $D \neq C$ et le segment $[AB]$ en $E \neq B$. Soient K le point de la demi-droite $[BD$ tel que $|BK| = |AC|$ et L le point de la demi-droite $[CE$ tel que $|CL| = |AB|$. Montrer que le centre O du cercle circonscrit au triangle AKL se trouve sur ω.

Language : French

Temps accordé : 4.5 heures

Chaque problème vaut 7 points