7th Benelux Mathematical Olympiad

Mersch, May 8–10 2015

Opgaven (*Nederlandstalige versie*)

Opgave 1.

Bepaal het kleinste gehele getal $q \geqslant 1$ met de volgende eigenschap:
voor elk geheel getal m met $1 \leqslant m \leqslant 1006$, bestaat er een geheel getal n waarvoor geldt dat

$$\frac{m}{1007}q < n < \frac{m+1}{1008}q.$$

Opgave 2.

Zij ABC een scherphoekige driehoek met O het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Zij Γ_B de cirkel door A en B die raakt aan AC. Zij Γ_C de cirkel door A en C die raakt aan AB. Een willekeurige lijn door A snijdt Γ_B een tweede keer in X en snijdt Γ_C een tweede keer in Y. Toon aan dat $|OX| = |OY|$.

Opgave 3.

Bestaat er een priemgetal waarvan de decimale voorstelling van de vorm $3811\ldots11$ is (m.a.w., bestaande uit een 3 en een 8 in deze volgorde, gevolgd door één of meer cijfers 1)?

Opgave 4.

Een *rekenkundige rij* is een verzameling van de vorm $\{a, a+d, \ldots, a+kd\}$, waarbij a, d, k gehele getallen zijn met $a \geqslant 1$, $d \geqslant 1$ en $k \geqslant 2$. Een rekenkundige rij heeft dus minstens drie elementen en de opeenvolgende elementen hebben verschil d, dat we de *stapgrootte* van de rekenkundige rij noemen.

Zij $n \geqslant 1$ een geheel getal. Voor elke partitie (opdeling) van de verzameling $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ in rekenkundige rijen, bekijken we de som S van de respectievelijke stapgroottes van deze rekenkundige rijen. Wat is de maximale waarde die S kan bereiken?

(Een partitie van een verzameling A is een collectie disjuncte deelverzamelingen van A waarvan de vereniging (unie) A is.)
