6th Benelux Mathematical Olympiad

Brugge, May 2–4 2014

1. Bepaal de kleinst mogelijke waarde van de uitdrukking

$$\left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+d+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d+a+b}{c} \right\rfloor,$$

waarbij a, b, c en d variëren over de verzameling (strikt) positieve gehele getallen.

(Hier staat $\lfloor x \rfloor$ voor het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x.)

2. Zij $k \geq 1$ een geheel getal.

We beschouwen $4k$ fiches, waarvan er $2k$ rood zijn en $2k$ blauw. We kunnen een rijtje van deze $4k$ fiches veranderen in een ander rijtje door een zogenaamde *zet*, die bestaat uit het omwisselen van een aantal (mogelijk één) opeenvolgende rode fiches met een gelijk aantal opeenvolgende blauwe fiches. We kunnen bijvoorbeeld in één zet het rijtje $r\underline{bb}br\underline{rr}b$ veranderen in $r\underline{rr}br\underline{bb}b$, waarbij r staat voor een rood fiche en b voor een blauw fiche.

Bepaal het kleinste getal n (als functie van k) zodanig dat, ongeacht met welk rijtje van deze $4k$ fiches we beginnen, we ten hoogste n zetten nodig hebben om het rijtje te bereiken waarvan de eerste $2k$ fiches allemaal rood zijn.

3. Bepaal alle gehele getallen $n \geq 2$ met de volgende eigenschap:

> voor elk tweetal positieve delers $k, \ell < n$ van n is op zijn minst één van de getallen $2k - \ell$ en $2\ell - k$ ook een (niet noodzakelijk positieve) deler van n.

4. Zij gegeven een vierkant $ABCD$. Beschouw een variabel punt P in dit vierkant waarvoor $\angle BAP \geq 60^\circ$. Zij Q het snijpunt van lijn AD en de loodlijn op BP door P. Zij R het snijpunt van lijn BQ en de loodlijn op BP door C.

(a) Bewijs dat $|BP| \geq |BR|$.

(b) Voor welk(e) punt(en) P geldt er in de ongelijkheid van (a) gelijkheid?

Language: Dutch

Beschikbare tijd: 4,5 uur

Elke opgave is 7 punten waard