



4th Benelux Mathematical Olympiad

20-22 April 2012 – Namur – Belgium

Problems

Language: *Dutch*

Opgave 1. Een rij (strikt) positieve gehele getallen a_1, a_2, a_3, \dots voldoet aan

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad \text{voor } n = 1, 2, \dots$$

waar b_n het laatste (meest rechtse) cijfer is in de decimale schrijfwijze van a_n . Bewijs dat zo'n rij oneindig veel machten van 2 bevat dan en slechts dan als a_1 niet deelbaar is door 5.

Opgave 2. Bepaal alle viertallen (a, b, c, d) van (strikt) positieve reële getallen die voldoen aan de drie voorwaarden $abcd = 1$, $a^{2012} + 2012b = 2012c + d^{2012}$ en $2012a + b^{2012} = c^{2012} + 2012d$.

Opgave 3. In een driehoek $\triangle ABC$ is M het midden van de zijde BC . Binnen de driehoek ligt een variabel punt P zo dat $\angle CPM = \angle PAB$. Zij Γ de omgeschreven cirkel van driehoek $\triangle ABP$ en definieer Q als het tweede snijpunt van de lijn (rechte) MP met Γ . Het spiegelbeeld van P ten opzichte van de raaklijn aan Γ in B noemen we R . Bewijs dat de lengte van het lijnstuk QR onafhankelijk is van de positie van P .

Opgave 4. Gisteren zaten er $n \geq 4$ ridders aan een ronde tafel. Ieder van de ridders heeft alleen onthouden wie zijn twee burens waren, maar niet welke van de twee links van hem zat en welke van de twee rechts. Vandaag willen we deze groep ridders weer zó om de tafel plaatsen dat iedereen dezelfde burens heeft als gisteren (waarbij het mogelijk is dat iemand z'n rechterbuur van gisteren vandaag zijn linkerbuur is). Je mag enkele ridders ondervragen over zijn burens: zo'n ridder zal dan zijn twee burens van gisteren aanwijzen.

- Bepaal het minimale aantal ridders $f(n)$ dat je hiervoor naar zijn burens moet vragen, als je je keuze voor een nieuwe ridder om te ondervragen, niet mag laten afhangen van de antwoorden die eerder ondervraagde ridders gegeven hebben. Je moet dus van tevoren een lijst maken met ridders die je wilt ondervragen, voordat je aan het daadwerkelijke ondervragen begint.
- Bepaal het minimale aantal ridders $g(n)$ dat je hiervoor naar zijn burens moet vragen, als je je keuze voor een nieuwe ridder om te ondervragen, wel mag laten afhangen van de antwoorden die eerder ondervraagde ridders gegeven hebben. Je mag dus eerst één ridder ondervragen en daarna besluiten wie je als tweede ridder ondervraagt, enzovoorts.

*Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard*