Language **Slovenian**

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Naloga 1. Končna množica celih števil je *slaba*, če je vsota njenih elementov enaka 2010. Končna množica celih števil je *Beneluks-množica*, če nobena njena podmnožica ni slaba. Določi najmanjše celo število n, za katero lahko množico $\{502, 503, 504, \ldots, 2009\}$ razbijemo v n Beneluks-množic. (Razbitje množice S v n podmnožic je družina n paroma disjunktnih podmnožic množice S, katerih unija je enaka S.)

Naloga 2. Poišči vse polinome $p(x)$ z realnimi koeficienti, za katere velja

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

za vse $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Naloga 3. Na premici l so dane tri različne točke A, B in P v tem vrstnem redu. Naj bo a premica skozi A, ki je pravokotna na l, b pa premica skozi B, ki je pravokotna na l. Od l različna premica skozi P seka a v Q in b v R. Premica skozi A, ki je pravokotna na BQ, seka BQ v L in BR v T. Premica skozi B, ki je pravokotna na AR, pa seka AR v K in AQ v S.

(a) Dokaži, da so točke P, T in S kolinearne.

(b) Dokaži, da so točke P, K in L kolinearne.

Naloga 4. Poišči vse četverice (a, b, p, n) naravnih števil, kjer je p praštevilo in velja

$$a^3+b^3=p^n.$$

Language: Slovene

Čas: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.