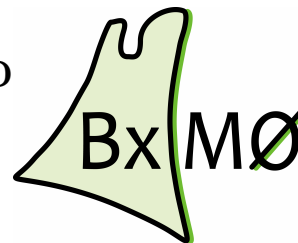


1st BENELUX MATHEMATICAL OLYMPIAD
Bergen op Zoom (Netherlands)
May 9, 2009



Language: **Flemish**

Opgave 1. Vind alle functies $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

- $f(n)$ is het kwadraat van een geheel getal voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$ voor alle $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Opgave 2. Zij n een strikt positief geheel getal en zij k een oneven positief geheel getal. Veronderstel dat a , b en c gehele getallen zijn (niet noodzakelijk positief) waarvoor geldt:

$$a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka.$$

Bewijs dat $a = b = c$.

Opgave 3. Zij $n \geq 1$ een geheel getal. In dorp X wonen n meisjes en n jongens; elk meisje hier kent elke jongen. In dorp Y wonen n meisjes, g_1, g_2, \dots, g_n , en $2n - 1$ jongens, $b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}$. Voor $i = 1, 2, \dots, n$ geldt dat meisje g_i jongens $b_1, b_2, \dots, b_{2i-1}$ kent en geen andere jongens. Zij r een geheel getal met $1 \leq r \leq n$. In elk van de dorpen wordt een feest gehouden waarbij r meisjes uit het betreffende dorp en r jongens uit hetzelfde dorp geacht worden met elkaar te dansen in r dansparen. Echter, elk meisje wil alleen dansen met een jongen die ze kent. Noem $X(r)$ het aantal manieren waarop we r dansparen kunnen kiezen in dorp X ; noem $Y(r)$ het aantal manieren waarop we r dansparen kunnen kiezen in dorp Y .

Bewijs dat $X(r) = Y(r)$ voor $r = 1, 2, \dots, n$.

Opgave 4. Zij gegeven een trapezium $ABCD$ met evenwijdige zijden AB en CD . Zij E een punt op de rechte BC , maar buiten lijnstuk BC , zodat lijnstuk AE snijdt met lijnstuk CD . Neem aan dat er een punt F bestaat op het inwendige van lijnstuk AD zodat $\angle EAD = \angle CBF$. Zij I het snijpunt van CD en EF en zij J het snijpunt van AB en EF . Zij K het midden van lijnstuk EF en neem aan dat K verschillend is van I en J .

Bewijs dat K op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABI$ ligt als en slechts dan als K op de omgeschreven cirkel van $\triangle CDJ$ ligt.

*Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard*

We zijn de auteurs van de opgaven dankbaar voor het beschikbaar stellen van deze opgaven voor de Benelux Olympiade. We hebben afgesproken om ze niet te publiceren op een forum of in enige andere vorm vóór 1 augustus 2009. We verwachten van jou als deelnemer dat je je aan deze afspraak houdt.